Очный тур олимпиады «Паруса надежды» 2018 год.

Вариант 4.

1) Проведем произвольную прямую $y = k - b$, пересекающую параболу в точках A и B. Тогда абсциссы концов хорды A и B должны удовлетворять условиям: $kx - b = x^2$, т.е. $x^2 - kx + b = 0, x_A = \frac{k-\sqrt{k^2-4b}}{2}$, $x_B = \frac{k+\sqrt{k^2-4b}}{2}$. Тогда абсцисса x_C середины отрезка AB равна $x_C = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{K}{2}$ и зависит только от углового коэффициента k, но не от b. Поэтому, если две хорды A_1B_1 и A_2B_2 параллельны, то их середины C_1 и C_2 имеют одинаковые абсциссы и прямая C_1C_2 параллельна оси OY. Перпендикулярная этой прямой хорда A_0B_0 параллельна оси OX и в силу симметрии ее середина лежит на оси OY. Поэтому прямая через т.C_0 параллельно C_1C_2 – это ось OY. Она пересекает параболу в вершине O, и прямая, проходящая через т.O перпендикулярно OY – это будет OX.

2) Обозначим $t = \frac{1}{x}; x = \frac{1}{t}$. Тогда получим равенство: $f\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{5}{t} f(t) = \frac{3}{t^3}$. Так как это равенство верно для любого $t \neq 0$, то оно верно для $t = x$. Отсюда имеем: $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{5}{x} f(x) = \frac{3}{x^3}$. Тогда получим систему равенств

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{5}{x} f(x) = \frac{3}{x^3} \\ f(x) + 5xf\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5xf\left(\frac{1}{x}\right) + 25f(x) = \frac{15}{x^2} \\ 5xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 3x^3 \end{cases}$$ вычитая из первого уравнения второе, получаем $24f(x) = \frac{15}{x^2} - 3x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{8x^2} - \frac{x^3}{8}$.

Ответ: $f(x) = \frac{5}{8x^2} - \frac{x^3}{8}$.

3) Обозначим $2x + y - 3z - 3 = m, x - 2y - 4z - 1 = n, y + 7z - 3x + 7 = k$

Тогда находим что $m + n + k = 3$. Так как по условию x, y, z –целые числа, то m, n, k также целые числа к тому же $m, n, k > 0$. Поэтому получаем, что $m = n = k = 1$ и тогда имеем неравенство: $0 > z^2 - 9z + 18$. Решая его, находим, что $3 < z < 6$ поэтому $z = \{4; 5\}$. Рассмотрим систему равенств $m = 1, n = 1$ как систему относительно x, y при известном z: $\begin{cases} 2x + y = 4 + 3z \\ x - 2y = 2 + 4z \end{cases} \Leftrightarrow$ решением этом системы будет: $x = 2z + 2, y = -z$, что при $z = 4$, либо $z = 5$ дает тройки решений: $(10; -4; 4)$ и $(12; -5; 5)$.

Ответ: $\{(10; -4; 4), (12; -5; 5)\}$.

4) Исходное неравенство будет равносильно неравенству:

$$\frac{(x-2)((x^2-2x)^2-9)}{(x-3)^2-(x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)}{(x-3-x-1)(x-3+x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)(x-3)}{-4*2(x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow$$

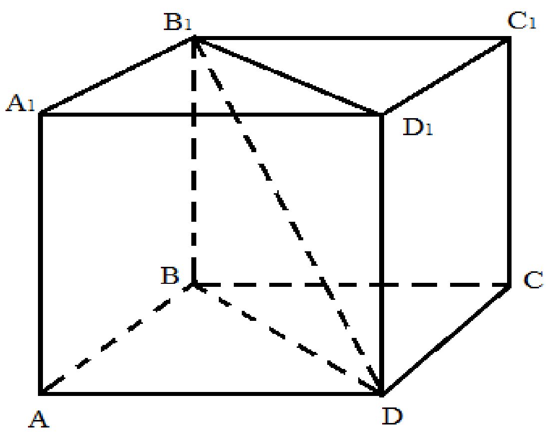
методом интервалов находим, что $x \in [-1;1) \cup [2;3]$. Ответ: $[-1;1) \cup [2;3]$.

5) Перемножив левую часть, получим:

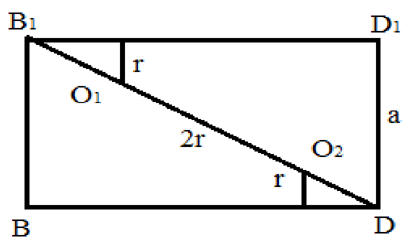
$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}+1$$

Докажем, что это выражение больше 5. Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то дробь положительна. Обозначим $\sin\alpha+\cos\alpha=t$. Тогда $1+2\sin\alpha\cos\alpha=t^2$, отсюда $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}$. Значит левая часть без 1 будет равна: $\frac{(t+1)2}{t^2-1}=\frac{2}{t-1}$. Нужно доказать, что $\frac{1}{t-1}>2 \Leftrightarrow t<\frac{3}{2}$ но $t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\right) \leq \sqrt{2} \approx 1{,}41$, т.е. $t<1{,}5$ ч.т.д.

6)



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб со стороной a. Так как любая точка диагонали B_1D равноудалена от трех граней, имеющих общую вершину, то центры шаров O_1, O_2 лежат на этой диагонали. Находим, что $B_1D=a\sqrt{3}$. Очевидно, что точка касания шара с гранью $A_1B_1C_1D_1$ лежит на B_1D_1, а с гранью $ABCD$ на BD. Обозначим радиус искомого шара через r. Тогда (см. рисунок)



$\frac{D_1D}{B_1D}=\sin\angle DB_1D_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$. С другой стороны, имеем $\frac{r}{B_1O_1}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow B_1O_1=r\sqrt{3}$.

А тогда $2r\sqrt{3}+2r=B_1D=a\sqrt{3} \Rightarrow r=\frac{a\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{a}{4}(3-\sqrt{3})$.

Ответ: $\frac{a}{4}(3-\sqrt{3})$.

7) Правая часть уравнения будет равна:

$\frac{10^{12}-1}{9}+\frac{10^{16}-1}{9}=\frac{(10^6-1)(10^6+1)}{9}+\frac{10^6-1}{9}=\frac{10^6-1}{9}(10^6+2)=\frac{10^6+2}{3}*\frac{10^6-1}{3}.$

Покажем, что число $\frac{10^6-1}{3}$ есть корень этого уравнения. Подставляя в уравнение, получаем: $\left(\frac{10^6-1}{3}\right)^2+\frac{10^6-1}{3}=\left(\frac{10^6-1}{3}\right)\left(\frac{10^6+2}{3}\right)$ что и требовалось доказать. Второй корень находим по т.Виета. Он равен $-\left(\frac{10^6+2}{3}\right)$.

Ответ: $\left\{\frac{10^6-1}{3};-\left(\frac{10^6+2}{3}\right)\right\}$.

8) Если $(x_0;y_0)$ какое то решение системы, то $(-x_0;y_0)$ также решение. А тогда $x_0=0$. Подставим $x=0$ в систему и найдем необходимые условия на a: $\begin{cases} a=y+1 \\ 1+|y|=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=0; a=+2$. Проверим достаточность. При $a=0$ получаем $y+\cos x=0, 2^{|\sin x|}+|y|=2$. Помимо решения $x=0, y=-1$, эта система имеет еще решение $x=\frac{\pi}{2}, y=0$, т.е. $a=0$ не подходит.

При $a=2$ получим: $\begin{cases} 2+2|x|=y+\cos\ x \\ 2^{|\sin x|}=2-|y| \end{cases}$ $x=0, y=1$ будет решением этой системы. Покажем, что других решений нет.

a) $y\geq 0$ тогда $\begin{cases} 2+2|x|=y+\cos x \\ 2^{|\sin x|}=2-y \end{cases} \Rightarrow$ так как $1\leq 2^{|\sin x|}\leq 2,$ то $0\leq y\leq 1$.

   Поэтому из первого уравнения имеем что $\begin{cases} y+\cos x\leq 2 \\ 2+2|x|\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix}$

b) $y\leq 0$ тогда $\begin{cases} 2+2|x|=y+\cos x \\ 2^{|\sin x|}=2+y. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим: $2+|2x|-2^{|\sin x|}=\cos x-2$. Отсюда: $\cos x-2<0$, а $2+2|x|-2^{|\sin x|}>0$, т.е. равенство невозможно.

Ответ: $a=2$.